Контрольная работа по курсу "Методы оптимизации"

1. Дайте определение дифференцируемой по Фреше функции, определенной в гильбертовом пространстве H.

2. Сформулируйте теорему Вейерштрасса для сильно выпуклых функционалов.

3. В пространстве $\mathbb{E}^4$ найдите проекцию точки (1,1,1,1) на множество

$$X = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{E}^4 : x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 \geqslant 12\}$$

4. Найдите все угловые точки множества

$$U = \Big\{u = (x, y) \in \mathbb{E}^2 : \ x \geqslant 0, \ y \geqslant 0, \ -2x + 4y \leqslant 4, \ x + y \geqslant 2, \ 2x - 3y \leqslant 6\Big\}$$

Укажите все точки минимума функции

$$f(x, y) = 2x - 4y, \quad u = (x, y) \in U$$

5. С помощью правила множителей Лагранжа, решите задачу минимизации

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 \to \inf, \quad X = \Big\{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : \ 3x + y \geqslant 4\Big\}$$

6. Найдите градиент функционала $J(u)$ в точке $u = u(t) = t^2$

$$J(u) = \int\limits_0^1 x^2(t; u)dt, \quad \dot{x} = u(t), \ x(0) = 1, \ t \in [0, 1]$$

7. Для задачи безусловной минимизации

$$f(x) = 2(x_1 - 3)^2 + 2(x_2 + 1)^2 + 2(x_3 - 1)^2 \to \min, \quad x \in X = \mathbb{E}^3$$

выполните один шаг классического метода Ньютона, взяв в качестве начального приближения $x_0 = \dfrac{1}{2} \cdot \Big(3, -1, 1\Big)^\top$. Будет ли получившаяся точка являться решением исходной задачи?